Esempi di esercizi d'esame – A.A. 2006/07
Analisi Matematica 2 – Ingegneria Elettronica
Proff. G. Vergara Caffarelli e L. Giacomelli

versione preliminare, si prega di segnalare eventuali errori

---

*) Determinare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = 16x^2 + y - \frac{1}{4}xy^4, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

....

Il punto critico è $(1/8, 2)$ ed è un punto di sella.

---

*) Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = e^x \left(x^2 + \frac{4}{9}y^3 - 3y \right)$$

e precisarne la natura.

....

I punti stazionari sono $(1, 3/2)$ e $(-3, 3/2)$; il primo è un punto di minimo locale, il secondo è un punto di sella.

---

*) Determinare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

....

Si ha

$$\begin{cases} f_x = 6x^2 - 6y = 0 \\ f_y = -6x + 6y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = y \end{cases} \iff (x,y) = (0,0) \text{ oppure } (x,y) = (1,1).$$

Inoltre

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \det(D^2 f(0,0)) = -36 < 0, \\ \det(D^2 f(1,1)) = 36 > 0 \ e \ f_{yy}(1,1) = 6 > 0, \end{array}$$

per cui $(0,0)$ è un punto di sella e $(1,1)$ è un punto di minimo locale.

---

*) Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma xyz \,\mathrm{d}s$$

dove $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in [0, \pi]$.

. . . .

$-\pi/(2\sqrt{2})$ (calcolo diretto).

---

*) Calcolare

$$\int_{+\gamma} xy \,\mathrm{d}x + xy \,\mathrm{d}y$$

dove γ è la porzione di circonferenza unitaria con centro nell'origine contenuta nei primi due quadranti.

. . . .

$2/3$ (calcolo diretto).

---

*) Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D (x+y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

dove

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; e^x + e^{-x} \leq y \leq \frac{5}{2} \right\}.$$

. . . .

Dopo aver tracciato un grafico qualtitativo si osserva che

$$e^x + e^{-x} = \frac{5}{2} \iff x = \pm \log 2$$

e che D è simmetrico rispetto all'asse y. Quindi

$$\iint_D (x+y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 2 \int_0^{\log 2} \int_{e^x + e^{-x}}^{\frac{5}{2}} y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 5 \log 2 - 3.$$

---

*) Calcolare

$$\iint_\Omega \frac{y^2}{x} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

dove

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x^2, \; y^2 \leq y \leq 3y^2\}.$$

. . . .

Introducendo il cambio di variabili

$$(u, v) = \Psi(x, y) = \left(\frac{x^2}{y}, \frac{y^2}{x}\right)$$

si ha

$$\Psi(\Omega) = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq u \leq 1,\ \frac{1}{3} \leq v \leq 1\right\}$$

e

$$\det\left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right) = \det\begin{pmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{pmatrix} = 3.$$

Perciò

$$\iint_\Omega \frac{y^2}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Psi(\Omega)} v\,\frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{3} = \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{\frac{1}{3}}^{1} v\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \frac{2}{27}.$$

---

*) Calcolare

$$\iint_\Omega xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

dove

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq y \leq (x+1)^2,\ 0 \leq x \leq 5 - y\right\}.$$

. . . .

Dopo aver tracciato un grafico qualitativo, si osserva che $x = 5 - y$ se e solo se $y = 5 - x$ e che

$$\begin{cases} (x+1)^2 = 5 - x \\ x \geq 0 \end{cases} \iff x = 1.$$

Quindi

$$\iint_\Omega xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^{(x+1)^2} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^5\int_0^{5-x} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{43}{20} + \frac{64}{3}.$$

---

*) Calcolare

$$\iint_\Omega \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

dove

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$$

il (ovvero il cerchio di centro $(1, 0)$ e raggio 1).

. . . .

Passando in coordinate polari con centro nell'origine,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (r, \theta) \in (0, \infty) \times (-\pi, \pi),$$

si ottiene

$$x^2 + y^2 - 2x = r^2 - 2r\cos\theta \le 0 \iff r \le 2\cos\theta \quad \text{e} \quad \cos\theta \ge 0.$$

Pertanto

$$\iint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{32}{9}.$$

---

*) Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega = \frac{2\cos(2x)}{3y+1}\,\mathrm{d}x - \frac{3\sin(2x)}{(3y+1)^2}\,\mathrm{d}y$$

lungo la curva $\gamma(t) = (2^{t/3}, \log(1 + t^7(e-1)))$, $t \in [0,1]$.

....

La forma è esatta negli aperti connessi $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y > -1/3\}$ e $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y < -1/3\}$:

$$\omega = dU, \quad U(x,y) = \frac{\sin(2x)}{3y+1}, \quad (x,y) \in A_1 \text{ oppure } (x,y) \in A_2.$$

Pertanto, poiché $\mathrm{im}\,(\gamma) \subset A_1$,

$$\int_{+\gamma} \omega = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)) = U(2^{1/3}, 1) - U(1,0) = \frac{1}{4}\sin(2^{4/3}) - \sin 2.$$

---

*) (a) Determinare $A \in \mathbb{R}$ in modo tale che la forma differenziale

$$\omega = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left(-2xy\,dx + (x^2 - Ay^2)\,dy\right)$$

sia chiusa nel suo dominio D;

(b) per tale valore di A calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove γ è una qualunque curva regolare in D che parte dal punto $(1,1)$ e arriva al punto $(2,2)$.

....

Visto che per svolgere (b) risulterà necessario integrare la forma, conviene svolgere (a) cercandone le primitive (ricordiamo che: ω esatta in $D \Rightarrow \omega$ chiusa in D). Si ha

$$U(x,y) = -2\int \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{y}{x^2+y^2} + C(y),$$

e

$$U_y(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} + C'(y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + C'(y),$$

per cui se $A = 1$ allora

$$dU = \omega \quad \text{con } U(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + C$$

e in questo caso, poiché $\mathrm{im}\gamma \subset D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$,

$$\int_\gamma \omega = U(2,2) - U(1,1) = -1/4.$$

---

*) Calcolare l'area della regione Ω delimitata dal sostegno della curva $\gamma = (t\cos t, t\sin t)$, $t \in (0, 2\pi)$, e dal segmento che congiunge i punti $(0,0)$ e $(2\pi, 0)$.

. . . .

Per il Teorema della divergenza

$$\iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_\Omega \mathrm{div}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x,y)\cdot\mathbf{n}_e\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_{+\partial\Omega}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x).$$

Poiché il contributo sul segmento è nullo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[t\cos t(\sin t + t\cos t) - t\sin t(\cos t - t\sin t)]\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{4\pi^3}{3}.\end{aligned}$$

---

*) Calcolare

$$\int_{\partial\Omega}\left(y^3 + x^3, y^3 - e^x\right)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s$$

dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2,\ x \leq 0,\ y \geq 0\}$ ed $\mathbf{n}$ è la normale esterna ad Ω.

. . . .

Applicando il Teorema della divergenza e successivamente passando in coordinate polari si ottiene

$$\int_{\partial\Omega}\left(y^3 + x^3, y^3 - e^x\right)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \iint_\Omega 3(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^3\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

---

*)Calcolare

$$\int_{\partial\Omega}\left(x + y^2 - 3, y + x^2 - 6\right)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s$$

dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 \leq 0\}$ ed $\mathbf{n}$ è la normale esterna ad Ω.

. . . .

Poiché

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = (x-2)^2 + (y+1)^2 - 4,$$

Ω è il cerchio di centro $(2,-1)$ e raggio 2. Utilizzando il Teorema della divergenza si ottiene quindi

$$\int_{\partial\Omega} \big(x+y^2-3, y+x^2-6\big)\cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \iint_{\Omega} 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2|\Omega| = 8\pi.$$

---

*) Calcolare

$$\iint_S z^2\,\mathrm{d}\sigma$$

dove

$$S = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z = -\sqrt{3-x^2-y^2}\Big\}.$$

. . . .

Si tratta di una superficie cartesiana. Perciò si ottiene

$$\iint_S z^2\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{\{x^2+y^2\le 3\}} \sqrt{3-x^2-y^2}\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\pi\sqrt{3}\int_0^{\sqrt{3}} r\sqrt{3-r^2}\,\mathrm{d}r = 6\pi.$$

---

*) Determinare i punti di massimo e minimo assoluto della funzione $f(x,y)=x^2+y$ nell'insieme $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$.

. . . .

La funzione ammette massimo e minimo (per il Teorema di Weierstrass), è regolare in Ω e non ha punti critici interni al dominio. Sulla frontiera, parametrizzata in coordinate polari, si ha

$$g(\theta) := f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos^2\theta + \sin\theta.$$

Studiandola, si ottiene che

$$\max g = g(\pi/6) = g(5\pi/6) = 5/4, \quad \min g = g(3\pi/2) = -1.$$

Quindi i punti di massimo assoluto sono $(\pm\sqrt{3}/2, 1/2)$ e il punto di minimo assoluto è $(0,-1)$.

---

*) Calcolare, nel campo complesso, l'integrale

$$\int_{+\partial D} \frac{e^z-1}{z(z+3)}\,\mathrm{d}z$$

nei seguenti due casi:

a) $D=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|\le 1\}$;

b) $D=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|\le 5\}$.

. . . .

La funzione integranda ha una singolarità apparente in $z = 0$ e, un polo di ordine 1 in $z = -3$, in cui il residuo vale

$$\lim_{z \to -3} \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1 - e^{-3}}{3}.$$

Utilizzando il Teorema dei residui si ottiene quindi: 0 nel caso (a), $2i\pi \frac{1-e^{-3}}{3}$ nel caso (b).

---

*) Calcolare, nel piano complesso,

$$\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z^3 - z} \,\mathrm{d}z$$

dove γ è la frontiera del cerchio di centro $z = 0$ e raggio 2, orientata positivamente.

. . . .

La funzione integranda ha una singolarità apparente in $z = 0$ e due poli del primo ordine in $z = \pm 1$, in cui il residuo vale

$$\lim_{z \to 1} \frac{\sin z}{z(z+1)} = \frac{\sin 1}{2}, \quad \lim_{z \to -1} \frac{\sin z}{z(z-1)} = -\frac{\sin 1}{2}.$$

Perciò, per il Teorema dei residui, l'integrale vale 0.

---

*) Calcolare

$$\int_{+\partial\Omega} \frac{1}{\cos z} \,\mathrm{d}z,$$

dove

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 2\}.$$

. . . .

Gli zeri di $z \mapsto \cos z$ sono $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Perciò l'unico polo della funzione integranda interno a Ω è $z_0 = \frac{\pi}{2}$, e si ha

$$\lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{z - \frac{\pi}{2}}{\cos z} = \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{z - \frac{\pi}{2}}{\sin(\frac{\pi}{2} - z)} = -1.$$

Perciò, per il Teorema dei residui, l'integrale vale $-2\pi i$.

---

*) Calcolare

$$\int_{+\partial\Omega} \frac{1}{z^3 - 9i} \,\mathrm{d}z,$$

dove

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 3,\ \operatorname{Im} z > 0\}.$$

. . . .

I poli dell'integranda si determinano come segue:

$$z^3 = 9i = 9e^{i\pi/2} \iff z_k = 3^{2/3} e^{\frac{i}{3}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Si osserva che $z_0 = \frac{1}{2}3^{2/3}(\sqrt{3}+i) \in \Omega$, $z_1 = \frac{1}{2}3^{2/3}(-\sqrt{3}+i) \in \Omega$, $z_2 = -3^{3/2}i \notin \Omega$. Poiché

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)}, \quad \lim_{z\to z_1} \frac{1}{(z-z_0)(z-z_2)} = \frac{1}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)},$$

segue dal Teorema dei residui che

$$\int_{+\partial\Omega} \frac{1}{z^3-9i}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(z_0-z_1)}\left(\frac{1}{z_0-z_2} - \frac{1}{z_1-z_2}\right) = -\frac{2\pi i}{(z_0-z_2)(z_1-z_2)}.$$